书名：概率论与数理统计

ISBN：978-7-307-18486-2

作者：谢巍

出版社：武汉大学出版社

定价：42.00元

前　　言

概率论与数理统计是随机数学的两个分支，在各个领域都有非常广泛的应用。目前，我国高校绝大多数理工类和管理类专业，都将它作为一门重要的基础理论课程。

本书在已有概率统计教科书的基础上，结合作者多年的教学实践经验，着眼于介绍概率论与数理统计中的基本概念、基本原理和基本方法。为增强可读性、突出基本思想，我们在内容编排上，作了部分调整。全书共分为八章，随机事件与概率、随机变量及其分布、二维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、抽样分布、参数估计、假设检验。其中，将大数定律与中心极限定理独立作为一章，假设检验、例题和课后作业题的内容都比较充实，这样可使概率论与数理统计的主要内容更加清晰和突出。

部分内容和课后习题打上“＊”号，不作为对学生的基本要求，学生可以根据自身需要进行取舍，充分考虑到能适应不同层次的需要，也能供有志于进一步深造的读者参考。

由于编者的学识和水平有限，书中错漏和不妥之处在所难免，敬请广大读者和同行批评指正。

编　者

目　录

第一章　随机事件与概率

第一节　随机事件及其运算

一、随机现象

客观世界中发生的现象是多种多样的. 一类现象称为确定性现象，在一定条件下必然发生.例如，在标准大气压条件下，温度达到 100 ℃的纯水必然沸腾；异性电荷必然相互吸引等.另一类现象称为随机现象，这类现象中，无法由给定的条件准确地预报结果.例如，抛一枚质地均匀的硬币，观察其正反面出现的情况；某城市 8 月份的降雨量等.

在随机现象中，虽然对个别试验或观察来说，无法预测其结果，而在大量重复试验中，其结果又呈现出某种规律性，称为统计规律性.例如，多次重复抛一枚均匀的硬币，出现正面的次数大致一半；由某城市历年 8 月份的降雨量可以得到降雨量变化的大致规律.简单地说，所谓随机现象，就是具有统计规律性的不确定现象. 概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律的一门数学学科，在自然科学、工程技术和社会科学的众多领域中有着广泛重要的应用.例如，利用概率统计方法，可以进行气象预报、水文预报及地质勘探，产品质量的检测，元件或系统的使用可靠性及平均寿命的估计等.“概率论与数理统计”是数学应用最活跃的分支之一.

二、随机试验与样本空间

在实际中，有各种各样的试验，这里把试验的含义推广，包括各种各样的科学试验，甚至对某一事物的某种特征的观察也认为是一种试验.在一定条件下，对自然现象和社会现象进行的实验或观察，称为试验，通常用 E 表示.举例如下：

例 1－1　E_1：抛一枚均匀硬币，观察其正反面出现的情况；

E_2：将一枚硬币连抛三次，观察其正面出现的次数；

E_3：掷一颗骰子，观察可能出现的点数；

E_4：记录电话交换台一分钟内接到的呼叫次数；

E_5：在一批灯泡中任取一只，测试其寿命；

E_6：将一枚硬币连抛两次，考虑正反面出现的情况.

上述试验具有以下共同特点：

(1)可以在相同条件下重复进行；

(2)试验可能结果不止一个,但在试验前能确定所有的可能结果；

(3)一次试验之前无法确定具体是哪种结果出现.

将具有上述三个特点的试验称为简单随机试验,简称为随机试验,本教材中如无特殊说明,所谓试验,都是指这种随机试验.

随机试验 E 中的每个可能结果称为样本点,记为 ω,所有样本点组成的集合称为 E 的样本空间,记为 Ω.例如在 E_1 和 E_6 中,出现正面用 H 表示,出现反面用 T 表示,因此 E_1, …, E_6 的样本空间分别为：

$\Omega_1=\{H,T\}$；$\Omega_2=\{0,1,2,3\}$；$\Omega_3=\{1,2,3,4,5,6\}$；$\Omega_4=\{0,1,2,\cdots\}$；$\Omega_5=\{t \mid t\geqslant 0\}$；$\Omega_6=\{HH,HT,TH,TT\}$.

由上面讨论可知,样本空间可分为两种类型：

(1)有限样本空间,即样本点总数为有限多个,如 Ω_1、Ω_2、Ω_3、Ω_6；

(2)无限样本空间,即样本点总数为无穷多个,如 Ω_4、Ω_5.

无限样本空间又可分为可数(列)样本空间(如 Ω_4)和不可数(列)样本空间(Ω_5).

三、随机事件

试验中可能出现的情况叫做随机事件, 简称“事件”.记作 A、B、C 等.例如在 E_3 中,“出现奇数点”是随机事件,在 E_5 中,“所取灯泡寿命不超过 100 小时”也是随机事件.

特别地,一定条件下必然发生的事件,称为必然事件,用 Ω 表示.例如在 E_3 中 $\Omega=\{$出现奇数点或偶数点$\}$.同样,在一定条件下必然不发生的事件称为不可能事件,用$\varnothing$表示 . 例如在 E_3 中,$\varnothing=\{$既不出现奇数点,又不出现偶数点$\}$.

显而易见,根据随机事件的定义,随机事件是由一个或多个样本点组成的,因此称随机试验 E 的样本空间 Ω 的子集为随机试验 A 的随机事件. 任何事件均可表示为样本空间的某个子集,称事件 A 发生当且仅当试验的结果包含子集 A 中的元素.

特别地,由一个样本点组成的集合称为**基本事件**;由全体样本点组成的事件,在每次试验中它总是发生,称为**必然事件**,空集不包含任何样本点,它作为样本空间的子集,在每次试验中都不发生,称为**不可能事件**.

四、事件之间的关系与运算

事件是样本点的集合,因此事件之间的关系及运算与集合之间的关系及运算对应,下面就此作详细的介绍.

1.包含和相等关系

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称事件 A 包含于事件 B,或称事件 B 包含事件 A,记作 $A\subset B$,或 $B\supset A$.

如果 $A\subset B$ 且 $B\supset A$,则称事件 A 与事件 B 相等,记作 $A=B$.

显然$\varnothing\subset A\subset\Omega$;若 $A\subset B$,$B\subset C$,则有 $A\subset C$.

2.事件的和

事件 A 与 B 中至少有一个发生，这样的事件，称为 A 与 B 的和，记作 $A\cup B$.

由事件的和的定义，可得：

对任一事件 A，有

$$A\cup\Omega=\Omega, A\cup\varnothing=A.$$

$A=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示"$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个事件发生"这一事件.

$A=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示"可数无穷多个事件 A_i 中至少有一个事件发生"这一事件.

3.事件的积

事件 A 与 B 同时发生，这样的事件，称为事件 A 与 B 的积，记作 $A\cap B$ 或 AB.

由事件的积的定义，可得：

对任一事件 A，有

$$A\cap\Omega=A, A\cap\varnothing=\varnothing$$

$A=\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示"$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 这 n 个事件同时发生"这一事件.

$A=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示"可数无穷多个事件 A_i 同时发生"这一事件.

4.互斥事件（互不相容事件）

事件 A 与 B 不可能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与 B 为互斥事件（互不相容事件）.

5.互逆事件（对立事件）

事件 A 与 B 有且仅有一个发生，即 $A\cup B=\Omega, AB=\varnothing$，则称事件 A 与 B 为互逆事件（对立事件），记作 $B=\overline{A}, A=\overline{B}$.

6.事件的差

事件 A 发生而 B 不发生，称为事件 A 与 B 的差，记作 $A-B$.

不难验证

$$A-B=A\overline{B}=A-(AB), \overline{\overline{A}}=A, \overline{A}=\Omega-A$$

事件的关系与运算，可用集合论中的文氏（venn）图直观地予以表示（如图 1－1 所示）.

从集合的运算规则可以得到相应的事件的运算法则：

(1)交换律：$A\cup B=B\cup A, AB=BA$；

(2)结合律：$(A\cup B)\cap C=A\cup(B\cap C)$，

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

(3)分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，

(4)德摩根（De-Morgan）公式：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}, \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

结合律、分配律和德摩根公式还可以推广至任意有限个或可数无穷多个事件的情况.

例 1－2　从一批产品中每次取出一件产品进行检验（每次取后不放回），事件 A_i 表示第 i 次取得合格品（$i=1,2,3$），试用事件运算符号表示下列事件：

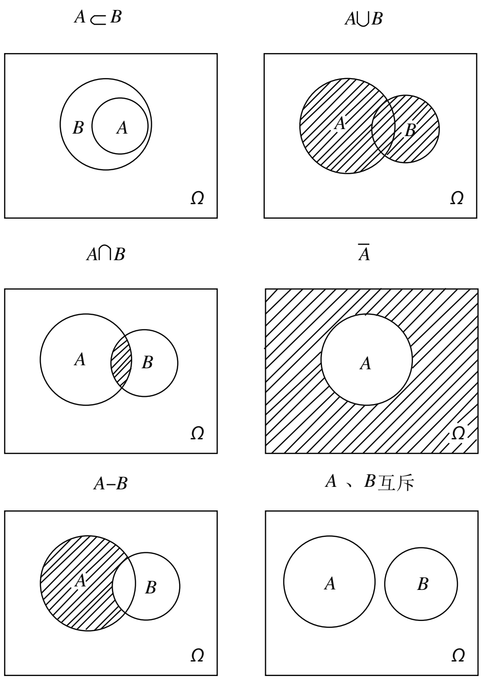

图 1－1 集合论中的文氏图

(1)三次全取得合格品；

(2)三次中只有第一只是合格品；

(3)三次中恰有一只合格品；

(4)三次中恰有两只合格品；

(5)三次中至少有两只合格品；

(6)三次中至多有一个合格品；

(7)三次中至少有一次取得次品.

解 三次全取得合格品：$A_1A_2A_3$；

三次中只有第一只是合格品：$A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$；

三次中恰有一只合格品：$(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)\cup(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)\cup(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)$；

三次中恰有两只合格品：$(A_1A_2\overline{A}_3)\cup(A_1\overline{A}_2A_3)\cup(\overline{A}_1A_2A_3)$；

三次中至少有两只合格品：$A_1A_2\cup A_1A_3\cup A_2A_3$；

三次中至多有一个合格品：$\overline{A}_1\overline{A}_2\cup\overline{A}_1\overline{A}_3\cup\overline{A}_2\overline{A}_3$；

三次中至少有一次取得次品：$\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\overline{A_3}\cup$或$\overline{A_1A_2A_3}$.

例 1－3 在数学系的学生中任选一名学生.若事件 A 表示被选学生是男生，事件 B 表示该生是三年级学生，事件 C 表示该生是运动员.

(1) 叙述 $AB\overline{C}$的意义.

(2) 在什么条件下 $ABC=C$ 成立？

(3) 在什么条件下 $\overline{A}\subset B$ 成立？

解　(1) 该生是三年级男生,但不是运动员.

(2) 全系运动员都是三年级男生.

(3) 全系女生都在三年级.

例 1-4　设甲、乙两人同时向同一目标射击,用事件 A 表示“甲射中目标,乙没射中目标”,求其对立事件 $\overline{A}$.

解　设 B=“甲射中目标”, C=“乙没射中目标”,则 $A=BC$,故

$\overline{A}=\overline{BC}=\overline{B}\cup\overline{C}$=“甲没射中目标或乙射中目标”.

第二节　概率及其运算

一、概率的统计定义

除了必然事件和不可能事件以外,对于一个随机事件在一次试验中是否发生,事先并不能确定,但发生的可能性有大小之分,我们希望能定量地描述这种可能性的大小,找到一个合适的数来表征此随机事件在一次试验中发生的可能性的大小. 为此,本节首先引入“频率”的概念,它描述了事件发生的频繁程度,进而引出表征事件在一次试验中发生可能性大小的数——概率.

1.频率

定义 1-1　事件 A 在 n 次相同的重复试验中出现 n_A 次,则称

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}$$

为事件 A 在 n 次重复试验中出现的频率.

显然,频率具有下列性质:

(1)(非负性) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$;

(2)(规范性) $f_n(\Omega)=1$;

(3)(可加性)若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为两两互斥事件,则

$$f_n(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=f(A_1)+f(A_2)+\cdots+f(A_n)$$

事件 A 发生的频率描述了事件发生的频繁程度. 频率越大,事件 A 发生越频繁,即在一次试验中 A 发生的可能性越大. 因此,自然想到用 A 发生的频率表示一次试验中 A 发生可能性的大小.但是,有个问题,频率不是固定数:一方面,这一遍 n 次重复试验中 A 发生的频率与另一遍 n 次重复试验中 A 发生的频率一般不相同;另一方面,当重复试验的次数 n 发生变化时,A 发生的频率也会有所改变,下面看一个著名的例子.

例 1-5　德摩根(De-Morgan)、蒲丰(Buffon)和皮尔逊(Pearson)曾分别掷一枚质地均匀的硬币,其结果见表 1-1.

表 1-1

实验者	掷硬币的次数	正面出现的次数	正面出现的频率
De-Morgan	2048	1061	0.5181
Buffon	4040	2048	0.5069
Pearson	12000	6019	0.5016
Pearson	24000	12012	0.5005

从上述实验来看，虽然频率不是固定数，但当试验的次数充分大时，频率总在 0.5 左右摆动，呈现出一种稳定性，这与直观感觉“出现正面”的可能性是 0.5 相一致. 因此，可以用“频率的稳定值”0.5 表示一次试验中事件 A 发生的可能性的大小. 这种“频率的稳定性”即通常所说的统计规律性，由此引入概率的统计定义.

2.概率的统计定义

定义 1-2　在相同条件下进行 n 次重复试验，事件 A 发生的次数为 n_A，事件 A 发生的频率为 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$.如果当 n 充分大时，$f_n(A)$稳定地在一常数值 P 的附近摆动，则称 P 为事件 A 的概率，记作 $P(A)=P$.

由概率的统计定义与频率的性质，易见概率具有以下性质：

(1)(非负性)$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(2)(规范性)$P(\Omega)=1$；

(3)(可加性)若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为两两互斥事件，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n})=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

由概率的定义可知，概率是衡量事件发生可能性大小的量. 概率的统计定义虽然直观，但在实用上，不可能对每一事件都做大量的重复试验，从中得到频率的稳定值，因此不便于实际计算使用. 另外，从数学上看，有些说法也不严密，不便于理论研究上使用.

二、概率的公理化定义及其性质

苏联科学家柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)从频率的稳定性与概率的统计定义得到启发，于 1933 年提出了如下概率的公理化定义：

定义 1-3　随机试验 E 的样本空间为 Ω，如对于 E 的每个事件 A，总有唯一确定的实数 $P(A)$与之对应，并且满足下列三条性质：

(1)(非负性)$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(2)(规范性)$P(\Omega)=1$；

(3)(可列可加性)若 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$为两两互斥事件，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

称为 $P(A)$事件 A 的概率.

概率的公理化定义看起来抽象，但它反映了事件概率的本质. 需要指出的是：$P(A)$可视

为事件 A 的函数,值域为$[0,1]$,定义域为全体事件的集合.

从概率的公理化定义可以导出概率的重要性质

性质 1　$P(\varnothing)=0$,即不可能事件的概率为 0.

性质 2　(有限可加性)　$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为两两互不相容事件,即 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j)$,则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i) \tag{1-1}$$

性质 3　A,B 为两个事件,

(1)$P(A-B)=P(A)-P(AB)$;　(1-2)

(2)若 $B\subset A$,则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$且 $P(B)\leqslant P(A)$.

性质 4　$P(\overline{A})=1-P(A)$　(1-3)

性质 5　(加法公式)$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$　(1-4)

推论

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)=&P(A)+P(B)+P(C)\\&-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\end{aligned} \tag{1-5}$$

$$\begin{aligned}P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=&\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1<i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots\\&+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)\end{aligned} \tag{1-6}$$

例 1-6　已知 $P(\overline{A})=0.5,P(\overline{A}B)=0.2,P(B)=0.4$,求:

(1)$P(AB)$,(2)$P(A-B)$,(3)$P(A\cup B)$,(4)$P(\overline{AB})$.

解　(1)因为 $AB\cup\overline{A}B=B$,且 AB 与 $\overline{A}B$ 互不相容,故有

$P(AB)+P(\overline{A}B)=P(B)$,

于是 $P(AB)=P(B)-P(\overline{A}B)=0.4-0.2=0.2$;

(2) $P(A)=1-P(\overline{A})=1-0.5=0.5$,

$P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.5-0.2=0.3$;

(3) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5+0.4-0.2=0.7$;

(4) $P(\overline{AB})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0.7=0.3$.

例 1-7　某市有甲、乙、丙三种报纸,订每种报纸的人数分别占全体市民人数的 30%,其中有 10%的人同时定甲、乙两种报纸.没有人同时订甲、丙或乙、丙报纸.求从该市任选一人,他至少订有一种报纸的概率.

解　设 A,B,C 分别表示选到的人订了甲、乙、丙报,则

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=30\%\times3-10\%-0-0+0=80\%\end{aligned}$$

例 1-8　设 A,B 为两事件,且设 $P(B)=0.3,P(A\cup B)=0.6$,求 $P(A\overline{B})$.

解　$P(A\overline{B})=P\{A(\Omega-B)\}=P(A-AB)=P(A)-P(AB)$,

而 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$,

所以 $P(A\cup B)-P(B)=P(A)-P(AB)$,

于是 $P(A\overline{B})=0.6-0.3=0.3$.

三、古典概型

定义 1-4　若随机试验 E 满足以下条件：

(1)样本空间 Ω 只有有限个样本点，即 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$；

(2)每个基本事件的发生是等可能的，即 $P(\{\omega_1\})=P(\{\omega_2\})=\cdots=P(\{\omega_n\})$，
则称此试验为古典概型，或称等可能概型.

设事件 A 包含 k 个基本事件，即

$$A=\{\omega_1\}\cup\{\omega_2\}\cup\cdots\{\omega_k\},P(\{\omega_i\})=\frac{1}{n},i=1,2,\cdots,n$$

则有

$$\begin{aligned}P(A)&=P(\{\omega_1\}\cup\{\omega_2\}\cup\cdots\{\omega_k\})=P\{\omega_1\}\cup\{\omega_2\}\cup\cdots\{\omega_k\}\\&=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots\frac{1}{n}=\frac{k}{n}\end{aligned}$$

由此，在古典概型中，如果样本空间的样本点总数为 n，事件 A 由 k 个样本点组成，则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 所包含样本点数}}{\Omega\text{ 中样本点数}}\tag{1-7}$$

例 1-9　设盒中有 3 个白球、2 个红球，现从盒中任抽 2 个球，求取到一红一白的概率.

解　设事件 A："取到一红一白".

$N(\Omega)=C_5^2,N(A)=C_3^1C_2^1$，

故 $P(A)=\dfrac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}=\dfrac{3}{5}$.

例 1-10　将 3 个球随机的放入 3 个盒子中去，问：

(1)每盒恰有一球的概率是多少？

(2)空一盒的概率是多少？

解　设 A："每盒恰有一球"，B："空一盒".

$N(\Omega)=3^3N(A)3!$

(1)$P(A)=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}=\dfrac{2}{9}$；

(2) $P(B)=1-P\{\text{空两盒}\}-P\{\text{全有球}\}$

$$=1-\frac{3}{3^3}-\frac{3!}{3^3}=\frac{2}{3}.$$

例 1-11　口袋装有 6 只球，其中 4 只白球、2 只红球.从袋中取球两次，每次随机地取一只.考虑两种取球方式：

(a)第一次取一只球，观察其颜色后放回袋中，搅匀后再任取一球.这种取球方式叫做有放回抽取.

(b)第一次取一球后不放回袋中，第二次从剩余的球中再取一球.这种取球方式叫做不放

回抽取.

试分别就上面两种情形,求:

(1) 取到的两只球都是白球的概率;

(2) 取到的两只球颜色相同的概率;

(3) 取到的两只球中至少有一只是白球的概率.

解　(a)有放回抽取的情形:

设 A 表示事件"取到的两只球都是白球",B 表示事件"取到的两只球都是红球",C 表示事件"取到的两只球中至少有一只是白球".则 $A\cup B$ 表示事件"取到的两只球颜色相同",而 $C=\overline{B}$.

在袋中依次取两只球,每一种取法为一个基本事件,显然此时样本空间中仅包含有限个元素,且由对称性知每个基本事件发生的可能性相同,因而可利用式(1-7)来计算事件的概率.

第一次从袋中取球有 6 只球可供抽取,第二次也有 6 只球可供抽取.由乘法原理知,共有 6×6 种取法,即基本事件总数为 6×6.对于事件 A 而言,由于第一次有 4 只白球可供抽取,第二次也有 4 只白球可供抽取,由乘法原理知共有 4×4 种取法,即 A 中包含 4×4 个元素.同理,B 中包含 2×2 个元素,于是

$$P(A)=(4\times4)/(6\times6)=4/9,P(B)=(2\times2)/(6\times6)=1/9,$$

由于 $AB=\varnothing$,故

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=5/9,$$
$$P(C)=P(\overline{B})=1-P(B)=8/9.$$

(b)不放回抽取的情形:

第一次从 6 只球中抽取,第二次只能从剩下的 5 只球中抽取,故共有 6×5 种取法,即样本点总数为 6×5.对于事件 A 而言,第一次从 4 只白球中抽取,第二次从剩下的 3 只白球中抽取,故共有 4×3 种取法,即 A 中包含 4×3 个元素,同理 B 中包含 2×1 个元素,于是

(1)
$$P(A)=(4\times3)/(6\times5)=\frac{P_4^2}{P_6^2}=\frac{2}{5},$$

$$P(B)=(2\times1)/(6\times5)=\frac{P_2^2}{P_6^2}=\frac{1}{15}.$$

由于 $AB=\varnothing$,故

(2)
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{7}{15},$$

(3)
$$P(C)=1-P(B)=\frac{14}{15}.$$

在不放回抽取中,一次取一个,一共取 m 次也可看做一次取出 m 个,故本例中也可用组合的方法,得

$$P(A)=\frac{C_4^2}{C_6^2}=\frac{2}{5},$$

$$P(B)=\frac{C_2^2}{C_6^2}=\frac{1}{15}.$$

例 1－12　30 名学生中有 3 名运动员，将这 30 名学生平均分成 3 组，求：

(1)每组有一名运动员的概率；

(2)3 名运动员集中在一个组的概率.

解　设事件 A：“每组有一名运动员”；事件 B：“ 3 名运动员集中在一组 ”.

$$N(\Omega)=C_{30}^{10}C_{20}^{10}\ C_{10}^{10}=\frac{30!}{10!\ 10!\ 10!}$$

$$N(A)=3!\ C_{27}^{9}C_{18}^{9}\ C_{9}^{9}\qquad N(B)=3\times C_{27}^{7}C_{20}^{10}\ C_{10}^{10}$$

$$(1)P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{3!\ \dfrac{27!}{9!\ 9!\ 9!}}{\dfrac{30!}{10!\ 10!\ 10!}}=\frac{50}{203};$$

$$(2)P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{3\times\dfrac{27!}{9!\ 9!\ 9!}}{\dfrac{30!}{10!\ 10!\ 10!}}=\frac{18}{203}.$$

古典概型要求随机试验的样本空间的样本点数有限，对于无穷样本点式(1－7)不成立，但我们任可以将其推广，通过下例实例来看.

例 1－13(几何概型)　电台每正点时报时一次，某人发现手表停了，打开收音机想听电台报时，求他等待时间短于 10 分钟的概率.

解　以分钟为单位，记上次报时时刻为 0，则下一次报时时刻为 60，于是此人打开收音机的时间必在(0，60)内，记“等待时间短于 10 分钟”为事件 A，则 $\Omega=(0,60)$，$A=(50,60)$.

于是 $P(A)=\dfrac{10}{60}=\dfrac{1}{6}$.

第三节　条件概率与独立性

一、条件概率

引例　一批同型号的产品由甲、乙两厂生产，产品结构见表 1－2.

表 1－2

	甲厂	乙厂	合计
合格品	475	644	1119
次品	25	56	81
合计	500	700	1200

从这批产品中随机抽取一件，则这件产品为次品的概率为

$$\frac{81}{1200}=6.75\%$$

现在假设被告知取出的产品是甲厂生产的,那么这件产品为次品的概率又是多少呢?显然,在已知取出产品是甲厂生产的条件下,它是次品的概率为$\frac{25}{500}=5\%$.记"取出的产品是甲厂生产的"这一事件为A,"取出产品为次品"这一事件为B.

在事件A发生的条件下,求事件B发生的概率,这种概率叫做条件概率,记作$P(B|A)$.

在本例中,我们注意到

$$P(B|A)=\frac{25}{500}=\frac{\frac{25}{1200}}{\frac{500}{1200}}=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

事实上,容易验证,对古典概型,只要$P(A)>0$,总有

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

由此启发,我们在一般的概率模型中引入条件概率的定义.

定义 1-5 设A,B为两个事件,且$P(A)>0$,则称

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \tag{1-8}$$

为事件A发生的条件下,事件B发生的条件概率.

易验证$P(B|A)$符合概率定义的三条公理,故对概率已证明的结果都适用于条件概率,例如,对于任意事件B_1,B_2,有

$$P(B_1\cup B_2|A)=P(B_1|A)+P(B_2|A)-P(B_1B_2|A).$$

又如,对于任意事件B,有

$$P(\overline{B}|A)=1-P(B|A).$$

例 1-14　一批产品100件,其中正品87件、次品13件.产品由甲车间生产的为61件,其中50件正品;由乙车间生产的为39件.现从该批产品中任取1件,并设A表示"取到甲车间的产品",B表示"取到正品".求$P(B|A),P(B|\overline{A}),P(A|B),P(A|\overline{B})$.

解　因为$P(A)=\frac{61}{100},P(AB)=\frac{50}{100}$,由条件概率的定义得

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{50}{100}}{\frac{61}{100}}=\frac{50}{61}$$

同理可得

$$P(B|\overline{A})=\frac{P(B\overline{A})}{P(\overline{A})}=\frac{\frac{27}{100}}{\frac{39}{100}}=\frac{27}{39},P(B|A)=\frac{50}{87},P(A|\overline{B})=\frac{11}{13}$$

此结果也可考虑用缩小样本空间的方法来做更为简洁,事实上,既然已经知道取出的是甲车间生产的,那么乙车间就可排除在考虑范围之外,因此"A已发生的条件下的事件B"就

相当于在所有的甲产品中任取一个,并取出来的是正品.从而 Ω_A 样本点总数不是原来的 100,而是甲产品数 61,甲车间取到的正品这件事包含的样本点总数 50,因此所求概率

$$P(B|A)=\frac{50}{61}$$

其他类似求得 $P(B|\overline{A})=\frac{37}{39}$,$P(A|B)=\frac{50}{87}$,$P(A|\overline{B})=\frac{11}{13}$.

二、乘法公式

由条件概率的定义,不难推出如下乘法公式:

乘法公式

$$P(AB)=P(B|A)P(A),P(A)>0 \tag{1-9}$$

$$P(AB)=P(A|B)P(B),P(B)>0 \tag{1-10}$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}) \tag{1-11}$$

其中,$P(A_i)>0$,$(i=1,2,\cdots,n)$.

例 1-15 一批产品共 10 件,其中 3 件次品,每次从中任取一件不放回,问第三次才取得次品的概率等于多少?

解 A_i 表示第 i 次取到次品,于是

$P(\overline{A}_1)=\frac{3}{10}$,$P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)=\frac{2}{9}$,$P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)=\frac{7}{8}$.

则根据乘法公式,有

$P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_1|\overline{A}_2)P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)=0.0583$.

三、事件的独立性

一般地,$P(B|A)\neq P(B)$,但在特殊条件下也有例外,先看下面例子.

例 1-16 设袋中有 3 个白球、2 个红球,现从袋中有放回地抽取两次,每次取一个,用 A 表示"第一次抽取得红球",B 表示"第二次取得红球",求 $P(B|A)$,$P(B)$.

解 $P(B|A)=P(B)=\frac{2}{5}$.

显然,上例中 $P(B|A)=P(B)$,由此可以得到 $P(AB)=P(A)P(B)$,此时称事件 A,B 相互独立.

定义 1-6 设 A,B 为两个事件,如果满足

$$P(AB)=P(A)P(B) \tag{1-12}$$

则称事件 A,B 相互独立,简称 A,B 独立.

需要说明,在实际应用中,判断事件的相互独立,往往不是根据上述定义,而是从实际意义加以判断.

显然,当事件 A,B 相互独立,且 $P(A)>0$ 时,有

$$P(B|A)=P(B)$$

定理 1－1　以下四命题等价

(1)事件 A,B 相互独立;(2)事件 $A,\overline{B}$ 相互独立;(3)事件 $\overline{A},B$ 相互独立;(4)事件 $\overline{A},\overline{B}$ 相互独立.

证明　这里仅证(1)与(2)等价,其他情况可以类似加以证明.由于 $A=AB\cup A\overline{B}$,

AB 与 $A\overline{B}$ 互不相容,于是有 $P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$,

若 A,B 相互独立,则 $P(AB)=P(A)P(B)$

故
$$\begin{aligned}P(A\overline{B})&=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B)\\&=P(A)(1-P(B))=P(A)P(\overline{B})\end{aligned}$$

由定义知,事件 $A,\overline{B}$ 相互独立.

若 $A,\overline{B}$ 相互独立,则 $P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})$

故
$$\begin{aligned}P(AB)&=P(A)-P(A\overline{B})=P(A)-P(A)P(\overline{B})\\&=P(A)(1-P(\overline{B}))=P(A)P(B)\end{aligned}$$

由定义知,事件 A,B 相互独立.

综上,(1)与(2)等价 .

证毕.

例 1－17　从一副 52 张(不含大小王)的扑克牌中任意抽取一张,A 表示抽出一张 A,B 表示抽出一张黑桃,问 A 与 B 是否独立?

解　$P(A)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13},P(B)=\frac{13}{52}=\frac{1}{4},P(AB)=\frac{1}{52}$.

得到 $P(AB)=P(A)P(B)$,故 A 与 B 独立.

事件相互独立的概念可以推广到有限多个事件上.

定义 1－7　设 A,B,C 为三个事件,如果满足:

$$P(AB)=P(A)P(B);P(AC)=P(A)P(C);$$
$$P(BC)=P(B)P(C);P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$$

则称 A,B,C 为**相互独立事件**.

上述定义中若 A,B,C 仅满足前三个式子,则称 A,B,C 两两独立,需要指出的是:相互独立必然两两独立,反之则不一定.

例 1－18　从分别标有 1,2,3,4 四个数字的 4 张卡片中随机抽取一张,以事件 A 表示"取到 1 或 2 号卡片";事件 B 表示"取到 1 或 3 号卡片";事件 C 表示"取到 1 或 4 号卡片",则事件 A,B,C 两两独立但不相互独立.

事实上,$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2},P(AB)=P(BC)=P(AC)=\frac{1}{4}$,

$P(ABC)=\frac{1}{4}\neq P(A)P(B)P(C)$.

进一步可以定义 n 个事件的独立性

定义 1－8　设 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,对于任意 $k(2\leqslant k\leqslant n)$个事件 $A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{ik}(1\leqslant i1<i2\leqslant\cdots<ik\leqslant n)$,如果满足

$$P(A_{i1}A_{i2},\cdots A_{ik})=P(A_{i1})P(A_{i2})\cdots P(A_{ik})$$

则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ **相互独立**.

同样,事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立则它们必然两两独立,反之则不一定对.

例 1－19　若每个人血清中含肝炎病毒的概率为 0.4%,今混合来自不同地区的 100 个人的血清,求此血清中有肝炎病毒的概率.

解　用 A_i 表示第 i 个人的血清中含有肝炎病毒,$i=1,2,\cdots,100$,则

$$P(A_1\cup A_2\cdots A_{100})=1-P(\overline{A_1\cup A_2\cdots A_{100}})=1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_{100}})$$

$$=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_1})\cdots P(\overline{A_{100}})=1-(1-0.4\%)^{100}\approx 0.3302$$

四、伯努利(Bernoulli)试验

随机现象的统计规律性只有在大量重复试验(相同条件下)中表现出来,将一个试验重复进行 n 次,这是一种非常重要的概率模型.

在相同条件下可以重复进行,且任何一次试验发生的结果都不受其他各次试验结果的影响,称这样的试验为重复独立试验.若在 n 次重复独立试验中,每次试验的可能结果只有两个:A 或 $\overline{A}$,则称 n 次重复独立试验为 n 重**伯努利试验**.

定理 1－2　设在一次试验中 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$,则在 n 重伯努利试验中事件 A 发生 k 次的概率为

$$P\{A\text{ 发生 }k\text{ 次}\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},k=0,1,2,\cdots,n$$

证明　A_i 表示第 i 次试验中事件 A 发生,$i=0,1,2,\cdots,n$,则

$$P(A_i)=p,P(\overline{A_i})=1-p$$

B_k 表示事件 A 发生 k 次,

则 B_k 是 C_n^k 个两两互不相容事件的并:

$$B_k=(A_1A_2\cdots A_k\overline{A_{k+1}}\,\overline{A_{k+2}}\cdots\overline{A_n})\cup(A_1A_2\cdots\overline{A_k}A_{k+1}\overline{A_{k+2}}\cdots\overline{A_n})\cup\cdots\cup(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_k}A_{k+1}A_{k+2}\cdots A_n)$$

$$P(B_k)=P(A_1A_2\cdots A_k\overline{A_{k+1}A_{k+2}}\cdots\overline{A_n})+(A_1A_2\cdots\overline{A_k}A_{k+1}\overline{A_{k+2}}\cdots\overline{A_n})+\cdots+(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_k}A_{k+1}A_{k+2}\cdots A_n)$$

由独立性可知

$$P(A_1A_2\cdots A_k\overline{A_{k+1}A_{k+2}}\cdots\overline{A_n})=P(A_1A_2\cdots\overline{A_k}A_{k+1}\overline{A_{k+2}}\cdots\overline{A_n}\cdots)$$

$$=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_k}A_{k+1}A_{k+2}\cdots A_n)=p^k(1-p)^{n-k}$$

故

$$P(B_k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

证毕.

例 1－20　某人进行射击,设每次射击命中目标的概率为 0.3,重复射击 10 次,求恰好命中 3 次的概率.

解　10 次射击为 10 重伯努利试验,在一次试验中击中目标为事件 A,

则　$P\{A\text{ 发生 }3\text{ 次}\}=C_{10}^3 0.3^3(1-0.3)^{10-3}\approx 0.2668$

第四节　全概率公式与贝叶斯(Bayes)公式

一、全概率公式

全概率公式是概率论的重要公式之一，它解决问题的基本思想是把复杂事件的概率转化为简单事件的概率的运算.基本方法是：将复杂事件化为两两互不相容事件之和，再利用概率的可加性.

定理 1－3　设 B 为随机试验 E 中的任一事件，事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 E 的一个完备事件组，即 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$，$A_iA_j = \varnothing (i \neq j)$（如图 1－2 所示）且 $P(A_i) > 0$，$i = 1, 2 \cdots, n$，则有

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i) P(A_i). \tag{1-13}$$

上述公式称为**全概率公式**.

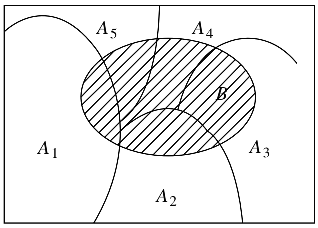

图 1－2

证 由已知条件有 $B = B \cap \Omega = B \cap (\bigcup\limits^{n} A_i) = (BA_1) \cup (BA_2) \cdots \cup (BA_n)$.

由于 $A_iA_j = \varnothing (i \neq j)$，所以 $BA_1, BA_2, \cdots, BA_n$ 两两互不相容，根据概率的有限可加性和乘法公式得

$$\begin{aligned} P(B) &= P(BA_1) + P(BA_2) + \cdots + P(BA_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(BA_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i) P(A_i) \end{aligned}$$

证毕.

需要指出的是，我们可以将事件 B 视为“结果”，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 则视为导致结果 B 发生的“原因”，称 $P(A_i)$ 为**先验概率**.

全概率公式中，把求 $P(B)$ 的问题转化为求 $P(B|A_i)$ 和 $P(A_i)$ 的问题，看似复杂化了，但在很多情况下，直接求 $P(B)$ 很不容易，而 $P(B|A_i)$ 和 $P(A_i)$ 却往往容易得到，从而使求 $P(B)$ 的问题得到解决.在使用全概率公式时关键是选取完备事件组，而且完备事件组中每个事件的概率及条件概率容易计算.

例 1－21　某机床厂从三个不同的轴承制造厂购进一批轴承，从第一厂、第二厂、第三厂分别进货为 50％、30％和 20％.根据以往经验得知三厂的产品次品率分别为 2％、3％和 4％.问：该机床厂购进这批轴承的次品率是多少？

解　设“取到的轴承是第 i 厂制造”为事件 $A_i (i = 1, 2, 3)$，“取出的一只轴承是次品”为

事件 B.由全概率公式

$$P(B)=P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3)$$

其中 $P(A_1)=0.5, P(A_2)=0.3, P(A_3)=0.2$

$$P(B|A_1)=0.02, P(B|A_2)=0.03, P(B|A_3)=0.04$$

于是 $P(B)=0.02\times 0.5+0.03\times 0.3+0.04\times 0.2=0.027$

二、贝叶斯(Bayes)公式

在全概率公式中,我们将事件 B 视为"结果",将 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 则视为导致结果 B 发生的"原因".有时我们还想知道结果 B 的发生到底主要由什么原因引起,即需求 $P(A_i|B)$,称为**验后概率**.

在例 1-21 中,可将机床厂购进次品轴承视为"后果",其"原因"来自三个轴承制造厂的产品,为讨论三个轴承厂的产品对这批轴承次品率的影响的大小,需要计算 $P(A_i|B)$,这时需要使用贝叶斯(Bayes)公式.

定理 1-4 设 B 为一事件且 $P(B)>0$,事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 构成一个完备事件组,且 $P(A_i)>0, i=1,2,\cdots,n$,则有

$$P(A_i \mid B)=\frac{P(A_iB)}{P(B)}=\frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B \mid A_j)P(A_j)} \tag{1-14}$$

证 由条件概率公式,得

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_iB)}{P(B)}$$

又由乘法公式 $P(A_i|B)=P(B|A_i)P(A_i)$,由全概率公式

$$P(B)=\sum_{j=1}^{n} P(B \mid A_j)P(A_j)$$

将这两个关系式代入上式,即得证.

例 1-22 继续讨论例 1-21.若从机床厂购进的这批轴承中任取一只,这只轴承是次品,问:此次品由每家轴承厂制造的概率分别为多少?

解 计算 $P(A_1|B)$,$P(A_2|B)$和 $P(A_3|B)$,在例 1-21 中已经计算出 $P(B)=0.027$,因此

$$P(A_1|B)=\frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B)}=\frac{0.02\times 0.5}{0.027}\approx 0.370$$

$$P(A_2|B)=\frac{P(B|A_2)P(A_2)}{P(B)}=\frac{0.03\times 0.3}{0.027}\approx 0.333$$

$$P(A_3|B)=\frac{P(B|A_3)P(A_3)}{P(B)}=\frac{0.04\times 0.2}{0.027}\approx 0.297$$

习题一

1.设 A、B、C 是某一随机试验的 3 个事件，用 A、B、C 的运算关系表示下列事件：

(1)A、B、C 都发生；

(2)A、B、C 都不发生；

(3)A 与 B 发生，而 C 不发生；

(4)A 发生，而 B 与 C 不发生；

(5)A、B、C 中至少有一个发生；

(6)A、B、C 中不多于一个发生；

(7)A 与 B 都不发生；

(8)A 与 B 中至少有一个发生；

(9) A、B、C 中恰有两个发生.

2.将一颗骰子连掷两次，观察其掷出的点数.令 A ="两次掷出的点数相同"，B ="点数之和为 10"，C="最小点数为 4".试分别指出事件 A、B、C，以及 $A\cup B$ 、ABC、$A-C$、$C-A$、$B\overline{C}$各自含有的样本点.

3.在一段时间内，某电话交换台接到呼唤的次数可能是 0 次，1 次，2 次，… .记事件 $A_k(k=1,2,\cdots)$表示"接到的呼唤次数小于 k"，试用 A_k 间的运算表示下列事件：

(1) 呼唤次数大于 2 ；

(2) 呼唤次数在 5 到 10 次范围内；

(3) 呼唤次数与 8 的偏差大于 2.

4.下列命题是否成立？说明理由：

(1) $A\cup B=A\overline{B}\cup B$　　(2) $A-B=A\overline{B}$

(3) $(AB)(A\overline{B})=\varnothing$　　(4) $\overline{AB}=\overline{A}\overline{B}$

(5) 若 $A\subset B$，则 $A=AB$　　(6)若 $A\subset B$ 则 $\overline{A}\subset\overline{B}$

5.事件 A、B、C 两两互不相容与 $ABC=\varnothing$是否为一回事？为什么？

6.设 A、B、C 是 3 个事件 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$，$P(AB)=P(BC)=0$，$P(AC)=\dfrac{1}{8}$，求 A、B、C 中至少有一个发生的概率.

7. $P(A)=\dfrac{1}{3}$，$P(B)=\dfrac{1}{4}$，$P(A\cup B)=\dfrac{1}{2}$求 $P(AB)$，$P(\overline{A}\cup\overline{B})$.

8.设 A、B、C 是三个随机事件，且有 $A\supset B$，$A\supset C$，$P(A)=0.9$，$P(\overline{B}\cup\overline{C})=0.8$，求 $P(A-BC)$.

9.将 10 本书任意放到书架上，求其中仅有的 3 本外文书恰排在一起的概率.

10.10 个号码：1 号，2 号，…，10 号，装于一袋中，从中任取 3 个，按从小到大的顺序排列，求中间的号码恰好为 5 号的概率.

11.从一批由 35 件正品，5 件次品组成的产品中任取 3 件，求其中恰有一件次品的概率.

12. 一批产品共 N 件，其中 M 件正品.从中随机地取出 n 件($n<N$).试求其中恰有 m 件

($m\leqslant M$)正品(记为 A)的概率.如果:

(1) n 件是同时取出的;

(2) n 件是无放回逐件取出的;

(3) n 件是有放回逐件取出的.

13.两封信随机地投入四个邮筒,求前两个邮筒内没有信的概率.

14.同时抛 m 枚硬币,求至少有一枚出现正面的概率.

15. 一个袋内装有大小相同的 10 个球,其中 4 个是白球、6 个是黑球,从中一次抽取 3 个,计算至少有两个是白球的概率.

16.某货运码头仅能容一船卸货,而甲乙两船在码头卸货时间分别为 1 小时和 2 小时.设甲、乙两船在 24 小时内随时可能到达,求它们中任何一船都不需等待码头空出的概率.

17.有 50 个零件,其中 48 个精度合格,45 个表面粗糙度合格,44 个精度和表面粗糙度都合格.现从中任取一个,已验得其表面粗糙度合格,问:其精度合格的可能性多大?

18.已知 $P(A)=\frac{1}{4}$,$P(B|A)=\frac{1}{3}$,$P(A|B)=\frac{1}{2}$,求 $P(A\cup B)$.

19.设 $P(A)=0.5$,$P(B)=0.6$.问 :

(1) 什么条件下 $P(AB)$可以取最大值,其值是多少?

(2) 什么条件下 $P(AB)$可以取最小值,其值是多少?

20.由长期统计资料得知,某一地区在 4 月份下雨(记为事件 A)的概率为$\frac{4}{15}$,刮风(记为事件 B)的概率为$\frac{7}{15}$,既刮风又下雨的概率为$\frac{1}{10}$.求 $P(A|B)$,$P(B|A)$及 $P(A\cup B)$.

21.某人有 5 把钥匙,其中两把可以打开门,从中随机取一把试开房门,求第三次才打开门的概率.

22. 一猎人用猎枪向一野兔射击,第一枪距离野兔 200m 远,如果未击中,他追到离野兔 150m 处第二次射击,如果仍未击中,他追到距离野兔 100m 处进行第三次射击,此时击中的概率为$\frac{1}{2}$.如果这个猎人射击的命中率与他到野兔的距离的平方成反比,求猎人击中野兔的概率.

23.已知某种疾病的发病率为 0.1%,该种疾病患者一个月以内的死亡率为 90%;且知未患该种疾病的人一个月以内的死亡率为 0.1%;现从人群中任意抽取一人,问:此人在一个月内死亡的概率是多少?若已知此人在一个月内死亡,则此人是因该种疾病致死的概率为多少?

24. 将两信息分别编码为 A 和 B 传递出来,接收站收到时,A 被误收作 B 的概率为 0.02,而 B 被误收作 A 的概率为 0.01.信息 A 与 B 传递的频繁程度为 2∶1.若接收站收到的信息是 A,试问:原发信息是 A 的概率是多少?

25. 商店论箱出售玻璃杯,每箱 20 只,其中每箱含 0,1,2 只次品的概率分别为 0.8, 0.1, 0.1,某顾客选中一箱,从中任选 4 只检查,结果都是好的,便买下了这一箱.问:这一箱含有一个次品的概率是多少?

26.设一箱产品共100件,其中次品个数从0到2是等可能的.开箱检验时,从中随机抽取10件,如果发现有次品,则认为该箱产品不合要求而拒收.

(1)求该箱产品通过验收的概率;

(2)若已知该箱产品已通过验收,求其中确实没有次品的概率

27.某保险公司把被保险人分为三类:"谨慎的"、"一般的"、"冒失的"。统计资料表明,上述3种人在一年内发生事故的概率依次为0.05、0.15和0.30;如果"谨慎的"被保的人占20%,"一般的"被保人占50%,"冒失的"被保人占30%.

(1)求被保险的人一年内出事故的概率;

(2)现知某被保险的人在一年内出了事故,则他是"谨慎的"的概率是多少?

28. 甲、乙、丙3人独立地向同一飞机射击,设击中的概率分别是0.4、0.5、0.7,若只有一人击中,则飞机被击落的概率为0.2;若有两人击中,则飞机被击落的概率为0.6;若三人都击中,则飞机一定被击落,求飞机被击落的概率.

29.电路由电池A与两个并联的电池B、C串联而成,设电池A、B、C损坏的概率分别是0.3、0.2、0.2,求电路发生断电的概率.

30.三人独立地破译一份密码,已知每人能破译的概率分别是$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$,求密码能被破译的概率.

31.某类灯泡试用时间在1000小时以上的概率为0.2,求3个灯泡在使用1000小时以后:

(1)都没有坏的概率;

(2)坏了一个的概率;

(3)最多只有一个坏了的概率.

32. 某工厂生产的仪器中一次检验合格的占60 % ,其余的需重新调试. 经重新调试的产品中有80 % 经检验合格,而20 % 会被判定为不合格产品而不能出厂.现该厂生产了200台仪器,求下列事件的概率:

(1) 全部仪器都能出厂;

(2) 恰有10台不合格.

33.甲、乙两人投篮命中率分别为0.7和0.8,每人投篮3次,求:

(1)两人进球数相等的概率;

(2)甲比乙进球数多的概率.

34.假设每个人的生日在任何月份都是等可能的,已知某单位中至少有一人的生日在一月份的概率不小于0.96,问:这个单位有多少人?

35.某自动化机器发生故障的概率为0.2,如果一台机器发生故障只需要一个维修工人去处理,因此,每8台机器配备一个维修工人,试求:

(1)维修工人无故障可修的概率;

(2)工人正在维修一台出故障的机器时,另外又有机器出故障等待维修. 如果认为每四台

机器配备一个维修工人，还经常出故障得不到及时维修。那么，四台机器至少应配备多少个维修工人才能保证机器发生了故障待维修的概率小于 3%？

36.* 巴拿赫火柴盒问题：某数学家有甲、乙两盒火柴，每盒有 N 根火柴，每次用火柴时他在两盒中任取一盒并从中任取一根. 试问：他首次发现一盒空时另一盒恰有 r 根的概率是多少($r=1,2,3,\cdots,N$)？第一次用完一盒火柴时(不是发现空)而另一盒恰有 r 根的概率又是多少？

第二章　随机变量及其分布

在随机试验中，人们除讨论某些特定事件发生的概率外，往往还要研究某个与随机试验的结果相联系的变量，以便对随机试验进行更全面深入的研究，由于这一变量的取值，依赖于随机试验的结果，因而被称为随机变量，与普通变量不同之处在于，人们无法事先预知其确切取值，但可以研究其取值的规律性. 本章将介绍两类随机变量及描述随机变量统计规律性的分布.

第一节　随机变量的概念

对一随机试验，其结果可以是数量性的，也可以是非数量性的. 对这两种情况，都可以把试验结果数量化.

例 2-1　设有 10 件产品，其中 5 件正品、5 件次品，现从中任取 3 件产品，问：这 3 件产品中的次品数是多少？

显然，次品件数可以是 0，1，2，3，即试验结果是数量性的. 用 X 表示取到的 3 件产品中的次品件数，X 是一个变量，它的取值为 0，1，2，3，具体哪个数值在试验之前不能预知，由试验后出现的样本点对应确定，样本空间为

$$\Omega=\{\omega\}=\{\text{没有次品，有 1 件次品，有 2 件次品，有 3 件次品}\}$$

因此可以把变量 X 看作定义在样本空间上的函数：

$$X=X(\omega)=\begin{cases}0, \omega=\text{“没有次品”}\\ 1, \omega=\text{“有 1 件次品”}\\ 2, \omega=\text{“有 2 件次品”}\\ 3, \omega=\text{“有 3 件次品”}\end{cases}$$

例 2-2　在一批电子元件中任取一只测试，其使用寿命 X（单位为 h）是一个变量，它的可能取值为$[0,+\infty)$上的任意实数，样本空间为 $\Omega=\{\omega\}=\{\omega\mid\omega\geqslant 0\}$，则 X 可看作定义在 $\Omega=\{\omega\mid\omega\geqslant 0\}$的函数

$$X=X(\omega)=\omega$$

例 2-3　掷一枚均匀硬币，观察正反面出现的情况.

该试验有两个可能结果，即 $\Omega=\{\omega\}=\{\text{出现正面，出现反面}\}$，试验结果是非数量性的. 为

了便于研究，试规定变量 X 取 1 表示“出现正面”，X 取 0 表示“出现反面”，则可以把变量 X 看作定义在样本空间上的函数

$$X=X(\omega)=\begin{cases}1,\omega=\text{“出现正面”}\\0,\omega=\text{“出现反面”}\end{cases}$$

例 2-4 设某路公共汽车在某站每隔 5 分钟通过一次，则某乘客到达汽车站后的等车时间 X 是一个随机变量，其取值范围是$[0,5]$.

从上面例子中变量 X 的共同特点加以概括抽象，得出随机变量的定义.

定义 2-1 设随机试验 E 的样本空间$\Omega=\{\omega\}$，如果对于每一个样本点 $\omega\in\Omega$，有一个实数 $X(\omega)$与之对应，得到一个定义在 Ω 上的单值实值函数 $X(\omega)$，称 $X(\omega)$为**随机变量**，简记为 X.

由定义可以看出，随机变量 $X(\omega)$为 ω 的实值函数，它与普通函数有区别：普通函数定义在实数轴上，而随机变量定义在样本空间上，样本空间中的元素不一定是实数. 另外，随机变量的取值随随机试验的结果而定，由于试验的各个结果的发生有一定的概率，因而随机变量取各个值也有一定的概率，这也是随机变量与普通函数的区别.

通常，我们用大写字母 $X,Y,Z,\cdots$表示随机变量，而用小写字母 $x,y,z,\cdots$表示随机变量相应的取值.值得注意的是，小写字母表示具体确定的数值，而不是随机变量.

引入随机变量后，随机事件可用随机变量表示，例如，在例 2-1 中，事件“有 1 件次品”可以用$\{X=1\}$表示，在例 2-2 中，事件“元件的寿命在 1000h 与 2000h 之间”可以用$\{1000<X<2000\}$表示，这样可以把对事件的研究转化为对随机变量的研究.由于有了数量化的随机变量，从而有可能使用微积分等数学工具研究随机试验.

通常可以把随机变量分为两种类型：离散型随机变量和非离散型随机变量，如果随机变量 X 的所有可能取值为有限个或可列无穷个，则此类随机变量为离散型随机变量；反之，为非离散型随机变量，在非离散型随机变量中最重要的并且应用最广泛的是连续型随机变量. 下面将分别介绍离散型随机变量和连续型随机变量.

第二节 离散型随机变量

一、离散型随机变量的分布律

定义 2-2 如果随机变量 X 的所有可能取值只有有限个或可列无穷多个，则称 X 为**离散型随机变量**.

在上节例 2-1、例 2-3 中的随机变量为离散型随机变量，例 2-2 的随机变量不是离散型随机变量.

定义 2-3 若随机变量 X 的所有可能取值为 $x_1,x_2,\cdots$，事件$\{X=x_k\}$的概率为 P_k，则称

$$P\{X=x_k\}=P_k,\ k=1,2,\cdots \tag{2-1}$$

为离散型随机变量 X 的**概率分布**或**分布律**.

离散型随机变量的分布律通常可写成表 2-1 所列形式.

表 2-1

X	x_1	x_2	…	x_k	…
P	p_1	p_2	…	p_k	…

显然,关于 p_k,具有以下两条性质:

(1)非负性:$p_k \geqslant 0, k=1,2,\cdots$; (2-2)

(2)规范性:$\sum p_k = 1$. (2-3)

例 2-5 讨论例 2-1 中随机产品中次品件数 X,它所有可能取值是 0,1,2,3. 则 X 的分布律为

$$P\{X=0\}=\frac{C_5^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{12}\ ,\ P\{X=1\}=\frac{C_5^1C_5^2}{C_{10}^3}=\frac{5}{12}$$

$$P\{X=2\}=\frac{C_5^2C_5^1}{C_{10}^3}=\frac{5}{12}\ ,\ P\{X=0\}=\frac{C_5^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{12}$$

二、常用的几个离散型随机变量的分布

1.0-1 分布

$$P\{X=x\}=p^x(1-p)^{1-x}, x=0,1 \tag{2-4}$$

常写成表 2-2 所列形式.

表 2-2

X	0	1
P	$1-p$	p

其中,$0<p<1$,则称 X 服从参数为 p 的 0-1 分布,$X\sim B(1,p)$.

0-1 分布有着广泛的实际背景,对于一个随机试验,如果只有两个可能结果,即样本空间 Ω 只包含两个元素,则总能在 Ω 上定义一个服从 0-1 分布的随机变量,例如例 2-3.还有检验产品质量是否合格,某人一次射击是否中靶,等等.

2.二项分布

若随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, k=0,1,2,\cdots,n \tag{2-5}$$

其中,n 为正整数,$0<p<1$,则称 X 服从参数为 n,p 的二项分布,记为 $X\sim B(n,p)$

在第一章第三节中介绍的伯努利概型中,事件 A 发生的次数就是随机变量 X,由定理 1-2可知,X 服从参数为 n,p 的二项分布,这是二项分布的实际背景.特别地,当 $n=1$ 时,二项分布就成为 0-1 分布.

例 2-6 从某大学到火车站途中有 6 个交通岗,假设在各个交通岗是否遇到红灯相互独立,并且遇到红灯的概率都是$\frac{1}{3}$.

(1)设 X 为汽车行驶途中遇到的红灯数,求 X 的分布律;

(2)求汽车行驶途中至少遇到 5 次红灯的概率.

解　由题意,$X \sim B(6,\frac{1}{3})$,于是,X 的分布律为:

(1)$P\{X=k\}=C_6^k(\frac{1}{3})^k(\frac{2}{3})^{6-k},k=0,1,\cdots,6$;

(2)$P\{X\geqslant 5\}=P\{X=5\}+P\{X=6\}$

$$=C_6^5(\frac{1}{3})^5(\frac{2}{3})+(\frac{1}{3})^6=\frac{13}{729}.$$

例 2-7　某人射击的命中率为 0.02,他独立射击 500 次,试求其命中次数不少于 2 的概率.

解　设命中次数为随机变量 X,则 $X \sim B(500,0.02)$,所求概率为

$$P\{X\geqslant 2\}=1-P\{X<2\}=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}$$

其中 $\lambda=np=10$.

$$P\{X=0\}=C_{500}^0(0.02)^0(0.98)^{500}\approx\frac{10^0e^{-10}}{0!}\approx 0.00004$$

$$P\{X=1\}=C_{500}^1(0.02)(0.98)^{499}\approx\frac{10^0e^{-10}}{1!}\approx 0.00045$$

因此　$P\{X\geqslant 2\}\approx 1-0.00004-0.00045=0.99951.$

这个概率很接近 1,我们从两方面来讨论这一结果的实际意义.其一,虽然每次射击的命中率很小(为 0.02),但如果射击 500 次,则击中目标至少两次是几乎可以肯定的.这一事实说明,一个事件尽管在一次试验中发生的概率很小,但只要试验次数很多,而且试验是独立地进行的,那么这一事件的发生几乎是肯定的.这也告诉人们决不能轻视小概率事件.其二,如果在 500 次射击中,击中目标的次数竟不到两次,由于 $P(X<2)\approx 0.003$ 很小,根据实际推断原理,我们将怀疑“每次射击的命中率为 0.02”这一假设,即认为该射手射击的命中率达不到 0.02.

在二项分布的概率计算中,如果 n 很大,计算量将十分大,为了简化计算,当 n 较大,p 较小(一般说来 $n>20,p<0.1$)可以使用下列公式:

$$C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},k=0,1,2,\cdots,n \tag{2-6}$$

其中,$\lambda=np=10$.

3.泊松(Poisson)分布

若随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},k=0,1,2,\cdots \tag{2-7}$$

其中,$\lambda>0$,则称 X 服从参数为 λ 的泊松分布,记为 $X\sim P(\lambda)$.

例 2-8　某市的 120 电话每分钟接到的呼叫次数服从参数为 5 的泊松分布,求每分钟接到的呼叫次数大于 4 的概率.

解　设每分钟120电话接到的呼叫次数为X，则$X \sim P(5)$，$\lambda=5$.

$$
\begin{aligned}
P\{X>4\} &= 1-P\{X\leqslant 4\}\\
&= 1-(P\{X=0\}+P\{X=1\}+P\{X=2\}+P\{X=3\}+P\{X=4\})\\
&= 1-\left(\sum_{k=0}^{4}\frac{5^k e^{-5}}{k!}\right)\approx 0.55952
\end{aligned}
$$

历史上泊松分布是作为二项分布的近似引入的，在实际问题中服从或近似服从泊松分布的随机变量也很常见，例如，一个时间间隔内，某地区发生的交通事故次数；一纺锭在某一时间段内发生的断头数；一段时间间隔内某放射物放射的粒子数；一段时间间隔内某容器内的细菌数，等等.

第三节　随机变量的分布函数

一、分布函数的定义

定义 2-4　设X是一个随机变量，对任意实数$X\in(-\infty,+\infty)$，令

$$F(x)=P\{X\leqslant x\} \tag{2-8}$$

称$F(x)$为随机变量X的**分布函数**.

由分布函数$F(x)$的定义可知，对任意实数$a,b(a<b)$，有

$$P\{X\leqslant a\}=F(a)$$

$$P\{X>a\}=1-F(a)$$

$$P\{a<X\leqslant b\}=P\{X\leqslant b\}-\{X\leqslant a\}=F(b)-F(a)$$

因此，如果已知随机变量X的分布函数$F(x)$就能确定X落在区间$(a,b]$的概率.在这个意义上，分布函数完整地描述了随机变量的统计规律性.

分布函数是普通的实值函数，定义域为R，值域为$[0,1]$.通过分布函数，能够用微积分的数学工具来研究随机变量.

二、分布函数的性质

随机变量X的分布函数$F(x)$具有下列性质.

(1)(单调性)　$F(x)$是变量x的单调不减函数，即当$x_1<x_2$时，有$F(x_1)\leqslant F(x_2)$；

(2)(有界性)　$0\leqslant F(x)\leqslant 1\quad(-\infty<x<+\infty)$，且

$$F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)=0,F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)=1$$

(3)(右连续性)　$F(x)$右连续，即$F(x+0)=F(x)$.

反之，若函数$F(x)$满足性质(1)、(2)、(3)，则$F(x)$必是某一随机变量的分布函数.

性质(1)、(2)可以由分布函数的定义和概率的性质证明，留给读者完成；性质(3)的严格证明还需要补充其他知识，这里从略.

例 2-9　设离散型随机变量X的分布律如表2-3所示：

表 2-3

X	0	1	2
P	0.5	0.3	0.2

求 X 的分布函数.

解 X 的所有可能取值为 0,1,2,而 $X\in(-\infty,+\infty)$,这 3 个点将实轴分为 4 个部分 $(-\infty,0)$,$[0,1)$,$[1,2)$,$(2,+\infty]$.

当 $X\in(-\infty,0)$时,事件$\{X\leqslant x\}$为不可能事件,因此 $F(x)=P\{X\leqslant x\}=0$

当 $X\in[0,1)$时,事件$\{X\leqslant x\}=\{X=0\}$,因此 $F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X=0\}=0.5$

当 $X\in[1,2)$时,事件$\{X\leqslant x\}=\{X=0\}\cup\{X=1\}$,因此

$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X=0\}+P\{X=1\}=0.5+0.3=0.8$

当 $X\in[2,+\infty)$时,$\{X\leqslant x\}=\{X=0\}\cup\{X=1\}\cup\{X=2\}$,因此

$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X=0\}+P\{X=1\}+P\{X=2\}=0.5+0.3+0.2=1$

故

$$F(x)=\begin{cases}0, x<0\\0.5, 0\leqslant x<1\\0.8, 1\leqslant x<2\\1, x\geqslant 2\end{cases}$$

$F(x)$的图形见图 2-1.

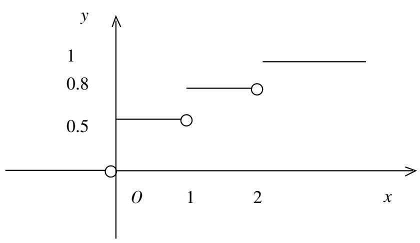

图 2-1

由图 2-1 可以看出,离散型随机变量 X 的分布函数 $F(x)$是阶梯函数.

一般的,设有离散型随机变量 X 的分布律见表 2-4.

表 2-4

X	x_1	x_2	…	x_k	…
P	p_1	p_2	…	p_k	…

那么它的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, x<x_1\\p_1, x_1\leqslant x<x_2\\p_1+p_2, x_2\leqslant x<x_3\\\quad\cdots\cdots\\p_1+p_2+\cdots+p_k, x_k\leqslant x<x_{k+1}\\\quad\cdots\cdots\end{cases}\qquad(2-9)$$

或简写为

$$F(x)=\sum_{x_k\leqslant x}p_k \tag{2-10}$$

其中，$\sum\limits_{x_k\leqslant x}p_k$ 表示对满足 $x_k\leqslant x$ 的一切下表 k 求和. 离散型随机变量的分布函数是阶梯函数，分布函数的跳跃点对应离散型随机变量的可能取值点，跳跃高度对应随机变量取对应值的概率；反之，如果某随机变量的分布函数是阶梯函数，则该随机变量必为离散型.

例 2－10　设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}A+B\mathrm{e}^{-\frac{x2}{2}},x>0\\ \qquad\qquad 0,x\leqslant 0\end{cases}$$

(1) 求系数 A、B；(2)计算 $P\{X\geqslant 2\}$，$P\left\{\frac{1}{2}<X<1\right\}$，$P\left\{X=\frac{1}{3}\right\}$.

解　(1) 由分布函数的性质 $F(+\infty)=1$ 及 $F(0+0)=F(0)=0$，有

$$\begin{cases}A=1\\ A+B=0\end{cases}$$

可得

$$\begin{cases}A=1\\ B=-1\end{cases}$$

故

$$F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\frac{x2}{2}},x>0\\ 0,x\leqslant 0\end{cases}$$

(2)$P\{X\leqslant 2\}=F(2)=1-\mathrm{e}^{-2}=0.8647$

$$P\left\{\frac{1}{2}<X\leqslant 1\right\}=F(1)-F\left(\frac{1}{2}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}}-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}=0.2760$$

$$P\left\{X=\frac{1}{3}\right\}=F\left(\frac{1}{3}\right)-F\left(\frac{1}{3}-0\right)=(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{18}})-(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{18}})=0$$

例 2－11　向[0,1]区间随机抛一质点，以 X 表示质点坐标.假定质点落在[0,1]区间内任一子区间内的概率与区间长成正比，求 X 的分布函数.

解　$F(x)=P(X\leqslant x)$，X 是落在[0,1]内，而 $X\in(-\infty,+\infty)$.

当 $x<0$ 时，$\{X\leqslant x\}=\phi$，因此 $F(x)=P(X\leqslant x)=0$.

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，由题意可得$\{X\leqslant x\}=\{0\leqslant X\leqslant x\}$，$F(x)=P(X\leqslant x)=kx$.

其中 k 为比例常数.

当 $x>1$ 时，$\{X\leqslant x\}=\Omega$，$F(x)=P\{X\leqslant x\}=1$.

因为 $F(x)$在 $x=1$ 右连续，所以 $F(1+0)=F(1)$，故 $k=1$.

综上所述，X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0,x<0\\ x,0\leqslant x\leqslant 1\\ 1,x>1\end{cases}$$

$F(x)$处处连续.

从例 2-11 可看出,$F(x)$为连续函数,有别于离散型随机变量的分布函数,下一节将讨论连续型随机变量.

第四节　连续型随机变量

一、连续型随机变量及其概率密度

定义 2-5　设 $F(x)$为随机变量 X 的分布函数,如果存在非负函数 $f(x)$,使得对任意 $X\in(-\infty,+\infty)$,都有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t \tag{2-11}$$

则称 X 为**连续型随机变量**,其中函数 $f(x)$称为 X 的**概率密度函数**,简称**概率密度**或**密度**.

容易验证,上节例 2-9 中的随机变量 X 的分布函数 $F(x)$满足

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

式中,$f(x)=\begin{cases}1,0\leqslant x\leqslant 1,\\0,\text{其他}.\end{cases}$

故式(2-11)中的随机变量 X 是连续型随机变量.

显然,概率密度函数具有下列性质:

(1)(非负性)$f(x)\geqslant 0$;　(2-12)

(2)(规范性)$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$.　(2-13)

可以证明,满足上述两条性质的 $f(x)$必是某一随机变量的密度函数.

定理 2-1　设 X 为连续型随机变量,$F(x)$,$f(x)$依次为 X 的分布函数和概率密度,则

(1)$F(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续;

(2)在 $f(x)$的连续点 x 处,$F'(x)=f(x)$;

(3)X 取任一实值的概率为零,即 $P(X=a)=0$;

(4)若 $a<b$,则

$$\begin{aligned}P\{a<X\leqslant b\}&=P\{a\leqslant X<b\}=P\{a\leqslant X\leqslant b\}=P\{a<X<b\}\\&=F(b)-F(a)=\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

证　这里仅证(3),其他留给读者完成.

对任意 $\varepsilon>0$,由$\{X=a\}\subset\{a-\varepsilon<X\leqslant a\}$得

$$0\leqslant P\{X=a\}\leqslant P\{a-\varepsilon<X\leqslant a\}=F(a)-F(a-\varepsilon)$$

由于 $F(x)$连续,故 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^{+}}[F(a)-F(a-\varepsilon)]=0$,从而

$$P\{X=a\}=0$$

则(3)得证.证毕.

由定理 2-1 可以看出,概率为零的事件不一定是不可能事件;类似地,概率为 1 的事件也不一定是必然事件.

在 $f(x)$的连续点 x 处,当 Δx 很小时,有 $P\{x\leqslant X\leqslant x+\Delta x\}\approx f(x)\Delta x$,因为

$$f(x)=F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{P\{x\leqslant X\leqslant x+\Delta x\}}{\Delta x}.$$

故当 Δx 很小时,有 $P\{x\leqslant X\leqslant x+\Delta x\}\approx f(x)\Delta x$.

性质(4)的几何意义为:X 落入区间(a,b)内的概率等于图 2-2 中曲边梯形的面积.

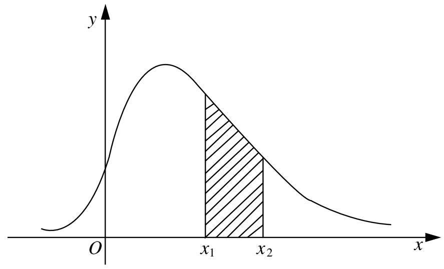

图 2-2

此外,由于在若干点上改变 x 的密度函数 $f(x)$的值并不影响其积分的值,因此也就不会影响 X 的分布函数 $F(x)$的值,这意味着连续型随机变量 X 的密度函数是不唯一的.例如

$$f_1(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & -1<x<1\\ 0 & 其他\end{cases}\quad 与\quad f_2(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & -1\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & 其他\end{cases}$$

可作为同一随机变量 X 的密度函数.虽然 $f_1(x)\neq f_2(x)$,但二者在概率意义上是无差别的.

例 2-12　设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, x<0\\ Ax^2, 0\leqslant x<1\\ 1, x\geqslant 1\end{cases}$$

试求:

(1)常数 A ;

(2)X 落在区间(0.3,0.7)内的概率;

(3)X 的密度函数.

解　(1)由于 X 为连续型随机变量,故 $F(x)$是连续函数,因此有

$$1=F(1)=\lim_{x\to 1-0}F(x)=\lim_{x\to 1-0}Ax^2=A,即 A=1,于是有$$

$$F(X)=\begin{cases}0, x<0\\ x^2, 0\leqslant x<1\\ 1, x\geqslant 1\end{cases}$$

(2) $P\{0.3<X<0.7\}=F(0.7)-F(0.3)=(0.7)^2-(0.3)^2=0.4$；

(3) X 的密度函数为

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}2x, 0\leqslant x<1\\ 0, 其他\end{cases}$$

例 2－13　设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{\sqrt{1-x^2}}, |x|<1\\ 0, \quad |x|\geqslant 1\end{cases}$$

(1)确定常数 a；

(2) X 落在 $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ 的概率；

(3) X 的分布函数 $F(x)$.

解　(1)由概率密度的规范性，有

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\frac{a}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=2a\int_0^1\frac{a}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=2a\arcsin x\Big|_0^1=2a\times\frac{\pi}{2}=\pi a$$

所以 $a=\dfrac{1}{\pi}$.

(2) $$P\left(-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\right)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\pi}\frac{a}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{a}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\arcsin\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{\pi}\times\frac{\pi}{6}=\frac{1}{3}$$

(3) 当 $x<-1$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}0\mathrm{d}t=0$

当 $-1\leqslant x<1$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\mathrm{d}x$

$$=\int_{-\infty}^{0}0\mathrm{d}x+\int_{-1}^{x}\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left(\arcsin x+\frac{\pi}{2}\right)$$

当 $x\geqslant 1$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{0}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}0\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x+\int_{1}^{x}0\mathrm{d}x=1$

所以 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, x<-1\\ \dfrac{1}{\pi}\arcsin x+\dfrac{1}{2}, -1\leqslant x<1\\ 1, x\geqslant 1\end{cases}$$

二、常用的几个连续型随机变量分布

1.均匀分布

若随机变量 X 概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b \\ 0 & ,其他\end{cases} \tag{2-14}$$

则称 X 服从 (a,b) 上均匀分布，记作 $X\sim U(a,b)$.

若 X 服从 (a,b) 的均匀分布，则对于满足 $a<c<d<b$ 的 c 和 d，由式(2-14)可得

$$P\{c<X<d\}=\int_c^d f(x)\mathrm{d}x=\frac{d-c}{b-a} \tag{2-15}$$

由于$\dfrac{1}{b-a}$是确定的常数，因此 X 取值于 (a,b) 中任一小区间的概率与该小区间的长度成正比，而与该小区间的位置无关，这就是均匀分布的意义.

例 2-14　在某公共汽车起点站，每隔 10 min 发出一辆客车，一位乘客任意时刻到站候车.求该乘客候车超过 3min 的概率.

解　设乘客候车时间为随机变量 X，由题意可知，X 服从 $(0,10)$ 上的均匀分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{10}, & 0<x<10 \\ 0, & 其他\end{cases}$$

则 $P\{X>3\}=\int_3^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_3^{10}\dfrac{1}{10}\mathrm{d}x+\int_{10}^{+\infty}0\mathrm{d}x=\dfrac{7}{10}$.

2.指数分布

若随机变量 X 概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & x\leqslant 0\end{cases} \tag{2-16}$$

其中，$\lambda>0$，则称 X 服从参数为 λ 的指数分布，记作 $X\sim E(\lambda)$.

容易得到 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & x\leqslant 0\end{cases} \tag{2-17}$$

指数分布有着重要的应用，常用作各种“寿命”分布的近似，如无线电元件的寿命、动物的寿命、随机服务系统的服务时间等. 指数分布具有“无记忆性”，即对任意 $s,t>0$，有

$$P\{X>s+t\mid X>s\}=P\{X>t\} \tag{2-18}$$

如果用 X 表示某一元件的寿命，那么上式表明，在已知元件已经使用了 s 时间的条件下，还能至少使用 t 时间的概率，与从开始使用时算起它至少能使用 t 的概率相等.这就是说，元件对它使用过 s 时间没有记忆，当然指数分布描述的是“无老化”的寿命分布，对一些寿命

长的元件，在初期阶段老化现象很小，在这一阶段指数分布比较确切地描述其寿命的分布情况.

式(2－18)容易证明，事实上

$$P\{X>s+t \mid X>s\}=\frac{P\{X>s, X>s+t\}}{P\{X>s\}}=\frac{P\{X>s+t\}}{P\{X>s\}}$$

$$=\frac{1-F(s+t)}{1-F(s)}=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda(s+t)}}{\mathrm{e}^{-\lambda x}}=\mathrm{e}^{-\lambda t}=P\{X>t\}$$

3.正态分布

若随机变量 X 概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)2}{2\sigma 2}} \quad -\infty<x<+\infty \tag{2-19}$$

其中，μ,σ 是常数，且 $\sigma>0$，则称 X 服从参数为 μ,σ^2 的**正态分布**，记作 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

正态分布是实践中应用最为广泛，在理论上研究最多的分布之一，故它在概率统计中占有特别重要的地位.若某一随机变量受到诸多随机因素的影响，而这些因素相互独立，每个因素的影响都不能起决定作用(作用微小)，而且这些影响结果可以相互叠加，那么这个随机变量服从或近似服从正态分布.例如，产品的质量指标，元件的尺寸，某地区成年男子的身高、体重，测量误差，农作物的产量等等，都服从或近似服从正态分布.

正态分布的概率密度 $f(x)$ 的图形如图 2－3 所示。

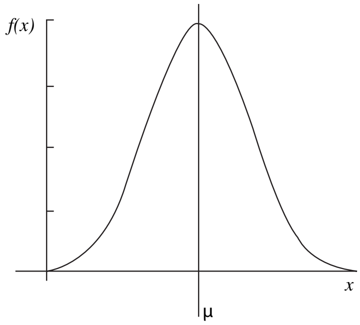

图 2－3

正态分布有如下特性：

(1)密度曲线关于直线 $x=\mu$ 对称；

(2)密度曲线在 $x=\mu$ 处取得最大值，x 离 μ 越远，$f(x)$值越小，这表明对于同样长度的区间，当区间离 μ 越远，X 落在该区间的概率越小；

(3)密度曲线在 $\mu\pm\sigma$ 处有拐点；

(4)密度曲线以 x 轴为渐近线；

(5)若固定 μ，当 σ 越小时图形越陡峻(见图 2－4)，因而 X 落在 μ 附近的概率越大；若固定 σ，当 μ 值改变，则图形沿 x 轴平移而不改变形状.

特别地，当 $\mu=0,\sigma=0$ 时，称 X 服从**标准正态分布**，记为 $X\sim N(0,1)$，其概率密度函数，

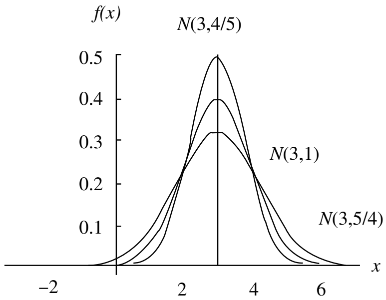

图 2-4

分布函数分别用记号 $\varphi(x)$，$\Phi(x)$表示，即

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad -\infty<x<+\infty \tag{2-20}$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt,\quad -\infty<x<+\infty \tag{2-21}$$

易知

$$\Phi(-x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt \overset{x=-y}{=} -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{+\infty}^{x}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=1-\Phi(x)$$

即

$$\Phi(-x)=1-\Phi(x) \tag{2-22}$$

$\Phi(x)$的计算比较复杂，为了使用方便，书后附有 $\Phi(x)$的函数值表可供查用易知.

定理 2-2　若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则有$\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$.

证明　$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$的分布函数为

$$P\{Z\leqslant x\}=P\{\frac{X-\mu}{\sigma}\leqslant x\}=P\{X\leqslant \mu+\sigma x\}$$

$$=\int_{-\infty}^{\mu+\sigma x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt \overset{s=\frac{t-\mu}{\sigma}}{=} \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{s^2}{2}}ds=\Phi(x)$$

所以 $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$，证毕.

例 2-15　抽样表明，某市新生儿体重 X(单位：千克)近似地服从正态分布 $N(3.4,\sigma^2)$. 已知该市新生儿体重不足 2 千克的占 3.1%，试求该市新生儿体重超过 4 千克的百分比.

解　由题设 $X\sim N(3.4,\sigma^2)$，且有 $P(X<2)=0.031$，于是

$$\Phi\left(\frac{2-3.4}{\sigma}\right)=0.031\Rightarrow\Phi\left(\frac{1.4}{\sigma}\right)=0.969$$

查表可得 $\frac{1.4}{\sigma}=1.87$，故 $\sigma=\frac{1.4}{1.87}=0.7487$，从而

$$P\{X>4\}=1-F(4)=1-\Phi\left(\frac{4-3.4}{0.7487}\right)=0.2119$$

即可认为该市新生儿体重超过 4 千克的约占 21%.

例 2-16　某地区 18 岁女青年的血压(收缩压)服从 $N(110,12^2)$.在该地区任选一位 18 岁女青年,测量她的血压.

(1)求 $P\{X<105\}$,$P\{100<X<120\}$;

(2)确定最小的 x,使 $P\{X>x\}<0.05$.

解　由 $X\sim N(110,12^2)$,得$\dfrac{X-110}{12}\sim N(0,1)$.

(1)$P\{X<105\}=\Phi\left(\dfrac{105-110}{12}\right)\approx\Phi(-0.42)\approx1-0.6628=0.3371$

$$P\{100<X<120\}=\Phi\left(\frac{120-110}{12}\right)-\Phi\left(\frac{100-110}{12}\right)$$
$$\approx\Phi(0.83)-\Phi(-0.83)\approx2\times0.7967-1=0.5934$$

(2)由于　$P\{X>x\}=1-P\{X\leqslant x\}=1-\Phi\left(\dfrac{x-110}{12}\right)<0.05$

即　　$\Phi\left(\dfrac{x-110}{12}\right)>0.95$,查表得

$$\frac{x-110}{12}>1.645$$

故需　　$x\geqslant129.74$

注:设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,则

(1)$P\{\mu-\sigma<X<\mu+\sigma\}=P\{-1<\dfrac{X-\mu}{\sigma}<1\}=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1=0.6826$;

(2)$P\{\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma\}=\Phi(2)-\Phi(-2)=0.9544$;

(3)$P\{\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma\}=\Phi(3)-\Phi(-3)=0.9974$.

尽管正态分布的随机变量 X 的取值范围是$(-\infty,+\infty)$,但它的值几乎都集中在$(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$区间内超出这个范围的可能性不到 0.3%,这在统计学上的称为 3σ 准则.

第五节　随机变量函数的分布

在测量圆轴截面面积的试验中,所关心的随机变量——圆轴截面面积 Y 不能直接测量得到,只能直接测量圆轴截面的直径 X 这个随机变量,再根据 $Y=\dfrac{1}{4}\pi X^2$ 得到 Y,随机变量 Y 是随机变量 X 的函数.

一般,设 $y=g(x)$是定义在随机变量 X 的一切可能取值 x 的集合上的函数,如果当 X 取值为 x 时,随机变量 Y 的取值为 $y=g(x)$,则称 Y 是随机变量 X 的函数,记作 $Y=g(X)$.

Y 是随机变量，并且是随机变量 X 的函数，因此 Y 的分布与 X 的分布有关.下面讨论由 X 的分布求 Y 的分布.

一、离散型随机变量的函数的分布

设 $Y=g(X)$，且 X 的分布律见表 2-5.

表 2-5

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

则随机变量 Y 的分布律见表 2-6.

表 2-6

$Y=g(X)$	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$\cdots$	$g(x_k)$	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

其中，当 $g(x_k)$中有相同的值时，则应把相同的值分别合并，并把对应的 p_k 分别相加.

例 2-17　设离散型随机变量见表 2-7.

表 2-7

X	-1	0	1	2
P	0.2	0.3	0.4	0.1

试分别求 $Y=2X$，$Z=X^2+1$ 的分布律.

解　见表 2-8.

表 2-8

X	-1	0	1	2
P	0.2	0.3	0.4	0.1
$Y=2X$	-2	0	2	4
$Z=X^2+1$	2	1	2	5

故 Y 的分布律见表 2-9.

表 2-9

$Y=2X$	-2	0	2	4
P	0.2	0.3	0.4	0.1

Z 的分布律见表 2-10.

表 2-10

$Z=X^2+1$	1	2	5
P	0.3	0.6	0.1

二、连续型随机变量的函数的分布

设 X 为连续型随机变量，其概率密度为 $f_x(x)$，随机变量 Y 是 X 的函数 $Y=g(X)$，求 Y 的概率密度 $f_y(y)$ 的一般方法是：可先求 Y 的分布函数

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{g(X)\leqslant y\}=\int_{g(X)\leqslant y}f(x)\mathrm{d}x$$

然后再求 Y 的概率密度 $f_y(y)$

$$f_y(y)=\frac{\mathrm{d}F_y(y)}{\mathrm{d}y}$$

此法也叫“分布函数法”.

例 2－18　设 $X\sim N(0,1)$，求 $Y=X^2$ 的概率密度.

解　X 的概率密度为

$$f_x(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x2}{2}}$$

由于 $Y=X^2\geqslant 0$，故当 $y\leqslant 0$ 时

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{X^2\leqslant y\}=0$$

当 $y>0$ 时

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{Y\leqslant y\}=P\{X^2\leqslant y\}=P\{-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}\\&=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})\end{aligned}$$

即

$$F_Y(y)=\begin{cases}0,y\leqslant 0\\F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y}),y>0\end{cases}$$

从而，Y 的概率密度为

$$\begin{aligned}f_y(y)=\frac{\mathrm{d}F_X(y)}{\mathrm{d}y}&=\begin{cases}0,y\leqslant 0\\\dfrac{1}{2\sqrt{y}}f(x)(\sqrt{y})+\dfrac{1}{2\sqrt{y}}f(x)(-\sqrt{y}),y>0\end{cases}\\&=\begin{cases}0,y\leqslant 0\\\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}},y>0\end{cases}\end{aligned}$$

定理 2－3　设随机变量 X 的概率密度为 $f_x(x)$，函数 $y=g(x)$ 处处可导且恒有 $g'(x)>0$（或恒有 $g'(x)<0$）去，其反函数为 $x=h(y)$，则 $Y=g(X)$ 也是连续型随机变量，其概率密度为

$$f_y(y)=\begin{cases}f_x[h(y)]|h'(y)|,\alpha<y<\beta\\0,\text{其他}\end{cases}\tag{2-23}$$

其中，$\alpha=\min\{g(-\infty),g(+\infty)\}$，$\beta=\max\{g(-\infty),g(+\infty)\}$.

定理 2－3 的证明从略，下面用一个例子说明它的应用.

例 2－19　$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，求 $Y=aX+b$（a，b 为常数，且 $a\neq 0$）.

解　$y=g(x)=ax+b$，$g'(x)=a>0$，$y=g(x)$的反函数为 $x=h(y)=\dfrac{y-b}{a}$.

且 $h'(y)=\dfrac{1}{a}$，$y=g(x)$的值域为$(-\infty,+\infty)$.

又
$$s_x(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)2}{2\sigma 2}}$$

故根据定理 2-3 可得
$$f_y[h(y)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{((\frac{y-b}{a}-\mu))2}{2\sigma 2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-[y-(a\mu+b)]2}{2a\sigma 2}}$$

从而
$$f_y(y)=\frac{1}{|a|}f_y[h(y)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}|a|\sigma}e^{\frac{-[y-(a\mu+b)]2}{2a\sigma 2}},\ -\infty<y<+\infty$$

上式表明 $Y\sim N(a\mu+b,(a\sigma)^2)$，从而说明服从正态分布的随机变量 X 的线性函数 $Y=aX+b(a\neq 0)$也服从正态分布.

注：若 $f_x(x)$在有限区间$[a,b]$以外等于零，则在定理 2-3 中，只需要假设在$[a,b]$上处处可导，恒有 $g'(x)>0$（或恒有 $g'(x)<0$）此时，式(2-23)中 $\alpha=\min\{g(a),g(b)\}$，$\beta=\max\{g(a),g(b)\}$.区间$[a,b]$也可改成开区间，半开半闭区间.

习题二

1.设随机变量 X 的分布律为 $P\{X=k\}=\dfrac{ak}{18}(k=1,2,\cdots,9)$.

(1)求常数 a；(2)求概率 $P\{X=1$ 或 $X=4\}$；(3)求概率 $P\left\{-1\leqslant X\leqslant\dfrac{7}{12}\right\}$.

2. 设随机变量 X 的分布律为 $P\{X=k\}=\dfrac{c}{k(k+1)}(k=1,2\cdots)$，求 c 的值.

3.盒中有 5 只球，分别编号为 1、2、3、4、5 号.在从盒中同时取出 3 只球，用 X 表示取出的 3 只球中最大的编号，写出 X 的分布律.

4.抛一枚硬币，直到出现正面为止，求抛的次数的分布律.

5.一批零件中有 9 个正品和 3 个次品，现从中任取一个，如果每次取出的是次品，则不再放回，再取下一个，直到取到正品为止，求在取到正品以前已取得出的次品数的分布律.

6.10 门炮同时向敌舰各射击一发炮弹，当有不少于两发炮弹击中时，敌舰将被击沉，设每门炮射击一发炮弹的命中率为 0.6，求敌舰被击沉的概率.

7.某街道有 10 部公用电话，调查表明在任一时刻每部电话被使用的概率为 0.85，求在同一时刻：

(1)被使用的电话部数 X 的分布律；

(2)至少有 8 部电话被使用的概率；

(3)至少有一部电话未被使用的概率；

(4)为保证至少有一部电话不被使用的概率不小于 90%，问：应再安装多少部公用电话？

8.甲、乙两人投篮，投中的概率分别为0.6、0.7，今各投3次，求两人投中次数相等的概率.

9.一电话交换台每分钟收到的呼唤次数 X 服从参数为4的泊松分布，求每分钟恰有3次呼唤的概率.

10. 某教科书出版了2000册，因装订等原因造成错误的概率为0.001，试求在这2000册书中恰有5册错误的概率.

11. 有2500名同一年龄和同社会阶层的人参加了保险公司的人寿保险.在一年中每个人死亡的概率为0.002，每个参加保险的人在1月1日需交12元保险费，而在死亡时家属可从保险公司领取2000元赔偿金.求：

(1) 保险公司亏本的概率；

(2) 保险公司获利不少于10000元的概率.

12.某射手射击一个固定目标，每次命中率为0.3，每命中一次记2分，否则扣1分，求两次射击后该射手得分总数的分布函数.

13.已知随机变量 X 的分布函数为 $F(X)=\begin{cases}0, x<0\\0.8, 0\leqslant x<1\\1, x\geqslant 1\end{cases}$，求 X 的分布律.

14. 已知随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=A\mathrm{e}^{-|x|},\qquad -\infty<x<+\infty$$

求：(1)A 值；(2)$P\{0<X<1\}$；(3)$F(x)$.

15.已知随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}2x, 0<x<1\\0, \text{其他}\end{cases}$，求

(1) $P\{X\leqslant 0.5\}$，(2) $P\{X=0.5\}$，分布函数 $F(x)$.

16. 连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}a, x<1\\bx\ln x+cx+d, 1\leqslant x\leqslant \mathrm{e}\\d, x>\mathrm{e}\end{cases}$

(1)试确定常数 a,b,c,d 的值；

(2)$P\left\{|X|\leqslant \frac{\mathrm{e}}{2}\right\}.1-\frac{\mathrm{e}}{2}\ln 2.$

17.在区间 $[0,a]$ 上任意投掷一个质点，以 X 表示这质点的坐标，设这质点落在 $[0,a]$ 中任意小区间内的概率与这小区间长度成正比例，试求 X 的分布函数.

18.某条线路的公共汽车每隔15min发一班车，某人来到车站的时间是随机的，问：此人在车站至少要等6min才能上车的概率是多少？

19. 设随机变量在(0,5)上服从均匀分布，求关于 x 的一元二次方程 $4x^2+4Xx+X+2=0$ 有实根的概率.

20. 某类节能灯管的使用寿命(单位：h) X 服从参数为 $\lambda=\frac{1}{2000}$ 的指数分布，任取一根灯管，求

(1)能正常使用 1000h 以上的概率；

(2)正常使用 1000h 后还能使用 1000h 以上的概率.

21.设顾客在某银行的窗口等待服务的时间 X(以分钟计)服从指数分布 $E(\frac{1}{5})$.某顾客在窗口等待服务，若超过 10 分钟他就离开.他一个月要到银行 5 次，以 Y 表示一个月内他未等到服务而离开窗口的次数，试写出 Y 的分布律，并求 $P\{Y\geqslant 1\}$.

22. 设 $X\sim N(3,22)$.

(1) 求 $P\{2<X\leqslant 5\}$，$P\{-4<X\leqslant 10\}$，$P\{|X|>2\}$，$P\{X>3\}$；

(2) 确定 c 使 $P\{X>c\}=P\{X\leqslant c\}$.

23. 已知 $X\sim N(2,\sigma^2)$，$P\{2<X<4\}=0.3$ 求 $P\{X<0\}$.

24.设测量两地间的距离带有随机误差 X，其概率密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{40\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)2}{3200}},-\infty<x<+\infty$$

求：(1)测量误差的绝对值不超过 30 的概率；

(2)接连测量 3 次，每次测量相互独立进行，求至少有一次绝对误差不超过 30 的概率.

25.某城市男子身高 $X\sim N(170,36)$.

(1)问：应如何选择公共汽车车门的高度使男子与车门碰头的机会小于 0.01？

(2)若车门高为 182cm，求 100 个男子中与车门碰头的人数不多于 2 个的概率.

26. 设随机变量 X 的分布律为

X	-2	-1	0	1	
P_k	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{11}{30}$

求 $Y=X^2$ 的分布律.

27. 设随机变量 $X\sim B\left(3,\frac{1}{4}\right)$，求 $Y=|x-1|$ 的分布律.

28. 设随机变量 X 的分布律为 $P\{X=k\}=\frac{1}{2^k}$，$k=0,1,2\cdots$.求 $Y=\sin\left(\frac{\pi}{2}X\right)$ 的分布律.

29.设 $X\sim N(0,1)$，求 $Y=e^X$ 的概率密度.

30.随机变量 X 的概率密度为 $f_x(x)$，$(-\infty<x<+\infty)$，求 $Y=X^3$ 概率密度函数.

31.测量球的直径，设直径服从$[a,b]$上的均匀分布，求球体积的概率密度.